

I grupa

Teorijska pitanja:

P1. Iskazati i zapisati generalisani Gausov zakon [2]? Šta je relativna dielektrična permitivnost i kako se označava [2]?

P2. Izvesti izraz za podužnu kapacitivnost vazdušnog koaksijalnog kondenzatora sa poluprečnicima elektroda a i b , $a < b$ [3].

P3. Ekvivalentna otpornost redne veze otpornika R_1 i R_2 je 10Ω . U rednoj vezi za snage Džulovih gubitaka na ovim

otpornicima važi $P_1:P_2=3:2$. Odrediti ove otpornike [3]? Odgovor bez obrazloženja se ne boduje.

P4. Definirati stacionarno strujno polje [1]. Jednačina kontinuiteta za stacionarno strujno polje [1]. Uslov prilagođenja prijemnika po snazi generatoru [1]. Iskazati i zapisati Ohmov zakon u lokalnom i integralnom obliku [2]

Zadaci:

Z1. Dva jednaka nepokretna punktualna naelektrisanja Q_1 nalaze se u tačkama $O(0,0)$ i $B(2x,0)$ u vakuumu. Obavezno nacrtati sliku (rešenje bez slike se ne boduje).

a) Odrediti jačinu električnog polja [1] i potencijal [2] u tački $M(x,0)$.

b) Iz tačke $C(3x,0)$ pušteno je da iz mirovanja krene malo, pokretno naelektrisanje Q_2 mase m .
Odrediti njegovu trajektoriju [1] i brzinu [2] u beskonačnosti.

Podaci: $Q_1=Q_2=10[\text{nC}]$, $m=10[\text{grama}]$, $x=10[\text{cm}]$, i $\epsilon_0=10^{-9}/36\pi[\text{F/m}]$.

Z2. Oko tanke, usamljene, metalne sfere poluprečnika $R=10[\text{cm}]$ naelektrisane količinom neelektrisanja $Q=1[\text{nC}]$ nalazi se sloj homogenog dielektrika debljine $d=10[\text{cm}]$, relativne dielektrične permitivnosti $\epsilon_r=10$, koji je koncentrično postavljen u odnosu na sferu. Sredina je vakuum. Odrediti:

a) Vektore dielektričnog pomeraja [2] i jačine elektrostatičkog polja u čitavom prostoru [2].

b) Potencijal [2] i kapacitivnost metalne sfere [1].

c) Površinsku gustinu slobodnog naelektrisanja na sferi [2].

Z3. Napon praznog hoda neke baterije je $12[\text{V}]$. Nakon priključivanja potrošača otpornosti $5[\Omega]$ napon na kontaktima baterije padne na $10[\text{V}]$. Nacrtati šemu kola (rešenje bez šeme se ne boduje). Odrediti

a) struju kroz potrošač [2],

b) snagu termičke disipacije na potrošaču [2],

c) snagu Džulovih gubitaka u bateriji [2],

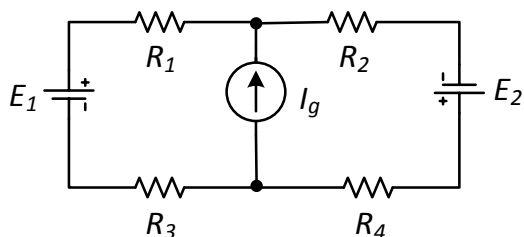
d) ako se paralelno potrošaču veže još jedan isti takav potrošač, kolika je tada struja kroz bateriju [2]?

Z4. Za kolo sa slike odrediti:

(a) struje naponskih [2+2] i napon strujnog generatora [2],

(b) uloženu snagu svakog generatora [2+2+2] .

Podaci: $E_1=24 [\text{V}]$, $E_2=12 [\text{V}]$, $I_g = 8 [\text{mA}]$, $R_1=5[\text{k}\Omega]$, $R_2=2 [\text{k}\Omega]$, $R_3=1 [\text{k}\Omega]$ i $R_4=4 [\text{k}\Omega]$.



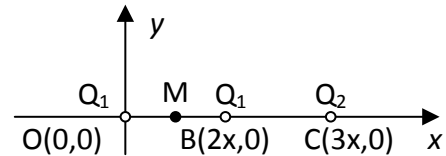
$$\mathbf{P2.} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{Q' \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \wedge \mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}_0, \quad a \leq r \leq b,$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad \boxed{C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

P3. U rednoj vezi struja je ista: $P_1 = I^2 R_1$, $P_2 = I^2 R_2$, $P_1 : P_2 = 3 : 2$ sledi $R_1 = 1.5 R_2$. Takođe $R_1 + R_2 = 10$, sledi $R_2 = 4\Omega$, $R_1 = 6\Omega$.

Z1. a) $\mathbf{E}_M(x, 0) = 0$ (zbog simetrije). Superpozicijom za potencijal se dobija:

$$V_M(x, 0) = V_M(Q_{1uO}) + V_M(Q_{1uB}) = 2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 10^{-9} / 36\pi} \frac{1}{0.1} = 1800V.$$



$$\mathbf{b)} \Delta E_K = A_{nad Q_2}, \quad m \cdot v_\infty^2 / 2 - m \cdot v_C^2 / 2 = Q_2 (V_C - V_\infty), \quad v_C = 0, \quad V_\infty = 0.$$

$$V_C = V_C|_{Q_1 u O} + V_C|_{Q_1 u B}, \text{ gde su } V_C|_{Q_1 u O} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{3x} \text{ i } V_C|_{Q_1 u B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{3x - 2x}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} \right] = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3x} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^{-9} / 36\pi} \frac{4}{0.3} = 1200V. \text{ Konačno } m \cdot v_\infty^2 / 2 = Q_2 V_C, \text{ pa je}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2Q_2 V_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 1200}{10 \cdot 10^{-3}}} \approx 49 \text{ mm/s}. \text{ Trajektorija je } x \text{ osa.}$$

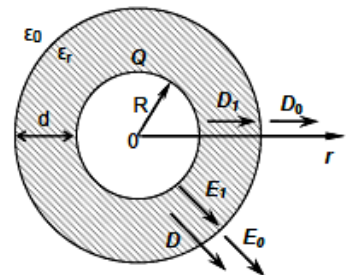
Z2. Granični uslovi: $\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{0n} \wedge (\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{1n} \wedge \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_{0n}) \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{slobodno}, \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad r \geq R,$$

$$E_1(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad R \leq r \leq R + d, \text{ u dielektriku, odnosno}$$

$$E_0(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad R + d \leq r \leq \infty, \text{ u vakuumu. Unutar sfere:}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0, \quad \text{za } r < R.$$



$$\text{Potencijal metalne sfere } V_s = V(r = R) = \int_{r=R}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{R+d} E_1(r) \cdot dr + \int_{R+d}^{\infty} E_0(r) \cdot dr$$

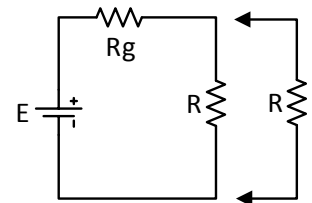
$$V_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} + \int_{R+d}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{1}{R+d} \right] = 49.5[V]$$

$$C = \frac{Q}{V_s} = 20.2[\text{pF}], \quad \sigma_0 = Q/S = Q/(4\pi R^2) = 1 \cdot 10^{-9} / [4\pi \cdot 10^{-2}] = 10^{-7} / 4\pi \approx 8[\text{nC/m}^2]$$

Z3. Ems baterije, $E = 12V$. $U = 10V$ je napon na potrošaču od $R = 5\Omega$, pa je struja kroz kolo $I = U/R = 10/5 = 2A$. $U = E - R_g I$, pa je $R_g = 1\Omega$.

$$P = R I^2 = 5 \cdot 2^2 = 20W = P. \quad P_g = R_g I^2 = 1 \cdot 2^2 = 4W = P_g.$$

Ukupno opterećenje akumulatora je sada $R_u = R || R = R/2 = 2.5\Omega$, pa je struja $I = E/(R_g + R_u) = 12/(1 + 2.5) = 3.43A = I$.



Z4) Metodom potencijala čvorova dobijamo:

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4}\right)V_A = I_g + \frac{E_1}{R_1 + R_3} - \frac{E_2}{R_2 + R_4}$$

$$\left(\frac{10^{-3}}{5+1} + \frac{10^{-3}}{2+4}\right)V_A = 8 \cdot 10^{-3} + 24 \frac{10^{-3}}{5+1} - 12 \frac{10^{-3}}{2+4}$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)V_A = \frac{48}{6} + \frac{24}{6} - \frac{12}{6}, \quad \frac{2}{6}V_A = \frac{60}{6} \Rightarrow V_A = 30[\text{V}].$$

Struja kroz E_1 je $I_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1 + R_3} = \frac{24 - 30}{6 \cdot 10^3} = -1[\text{mA}]$ sa usaglašenim smerom.

Struja kroz E_2 je $I_2 = \frac{V_A + E_2}{R_2 + R_4} = \frac{30 + 12}{6 \cdot 10^3} = 7[\text{mA}]$ sa usaglašenim smerom.

Napon na I_g je $U_g = V_A = 30[\text{V}]$ sa usaglašenim smerom.

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 24 \cdot (-1[\text{mA}]) = -24[\text{mW}]$$

b) $P_{E2} = E_2 \cdot I_2 = 12 \cdot 7[\text{mA}] = 84[\text{mW}]$

$$P_{I_g} = I_g V_A = 8[\text{mA}] \cdot 30 = 240[\text{mW}]$$